

Harmonische trilling

Opgave: Bol aan veer I


Als de trilling harmonisch is dan moet de terugdrijvende kracht recht evenredig zijn met de uitwijking uit de evenwichtstand en tegengesteld gericht zijn aan die uitwijking.

u staat voor de uitwijking uit de evenwichtstand.

u_0 staat voor de uitrekking van de veer.

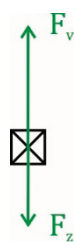
u_0 staat voor de uitrekking van de veer in de evenwichtstand.

Voor de evenwichtstand geldt:



$$\begin{aligned}
 &1) F_r = 0 \text{ N} \\
 &2) F_r = F_v - F_z \\
 &\quad * F_v = C \cdot u_0 \\
 &\quad * F_z = m \cdot g \\
 &\quad \Rightarrow F_r = C \cdot u_0 - m \cdot g \\
 &\quad \Rightarrow 0 = C \cdot u_0 - m \cdot g
 \end{aligned}$$

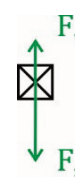
Geef de bol een uitwijking van u meter omlaag (F_r is dan omhoog gericht), dan geldt:



$$\begin{aligned}
 &1) F_r = F_t \\
 &2) F_r = F_v - F_z \\
 &\quad * F_v = C \cdot (u_0 - u) \quad -, \text{ want } u \text{ is negatief en } u \text{ moet groter worden} \\
 &\quad * F_z = m \cdot g \\
 &\quad \Rightarrow F_r = C \cdot (u_0 - u) - m \cdot g \\
 &\quad \Rightarrow F_r = C \cdot u_0 - m \cdot g - C \cdot u \\
 &\quad \Rightarrow F_r = -C \cdot u \quad \text{want } C \cdot u_0 - m \cdot g = 0 \\
 &\quad \Rightarrow F_t = -C \cdot u
 \end{aligned}$$

De resulterende kracht is $-C \cdot u$. Dat wil zeggen de uitwijking is omlaag en de resulterende kracht is omhoog.

Geef de bol een uitwijking van u meter omhoog (F_r is dan omlaag gericht), dan geldt:



$$\begin{aligned}
 &1) F_r = F_t \\
 &2) F_r = F_z - F_v \\
 &\quad * F_z = m \cdot g \\
 &\quad * F_v = C \cdot (u_0 - u) \quad -, \text{ want } u \text{ is positief en } u \text{ moet kleiner worden} \\
 &\quad \Rightarrow F_r = m \cdot g - C \cdot (u_0 - u) \\
 &\quad \Rightarrow F_r = m \cdot g - C \cdot u_0 + C \cdot u \\
 &\quad \Rightarrow F_t = C \cdot u \quad \text{want } C \cdot u_0 - m \cdot g = 0
 \end{aligned}$$

De resulterende kracht is $C \cdot u$. Dat wil zeggen: de uitwijking is omhoog en de resulterende kracht is omlaag. Bedenk dat we in vergelijking 2 de veronderstelling hebben ingebouwd dat de resulterende kracht omlaag gericht is. Dat betekent dat als deze veronderstelling klopt de uiteindelijke uitdrukking voor F_r een positieve waarde moet hebben anders klopt de veronderstelling niet. Dit is het geval, dus is de resulterende kracht omlaag.

We kunnen dus ook nu schrijven: $F_t = -C \cdot u$

De laatste redenering was iets ingewikkelder vanwege de notatie die we toe nu toe hebben gebruikt bij vergelijking 2. We hebben tot nu toe altijd geredeneerd: alle relevante krachten die het systeem op gang brengen minus alle relevante krachten die het systeem tegenwerken bij een versnelling en omgekeerd bij een vertraging.

Je kunt deze complicatie vermijden door een strikte afspraak te maken, namelijk: Alle krachten omhoog of naar rechts positief en alle krachten omlaag of naar links negatief nemen. Dit werkt wiskundig prima, maar is inzichtelijk wezenlijk beperkter.

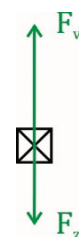
Bijvoorbeeld:

Geef de bol een uitwijking van u meter omhoog (F_r is dan omlaag gericht), dan geldt:



$$\begin{aligned}
 1) & F_r = F_t \\
 2) & F_r = F_v - F_z \\
 & * F_v = C \cdot (u_0 - u) \quad -, \text{ want } u \text{ is negatief en } u \text{ moet groter worden} \\
 & * F_z = m \cdot g \\
 \Rightarrow & F_r = C \cdot (u_0 - u) - m \cdot g \\
 \Rightarrow & F_r = C \cdot u_0 - m \cdot g - C \cdot u \\
 \Rightarrow & F_r = -C \cdot u \quad \text{want } C \cdot u_0 - m \cdot g = 0 \\
 \Rightarrow & F_t = -C \cdot u
 \end{aligned}$$

De vergelijkingen voor de uiterste stand beneden zien er exact hetzelfde uit!



$$\begin{aligned}
 1) & F_r = F_t \\
 2) & F_r = F_v - F_z \\
 & * F_v = C \cdot (u_0 - u) \quad -, \text{ want } u \text{ is negatief en } u \text{ moet groter worden} \\
 & * F_z = m \cdot g \\
 \Rightarrow & F_r = C \cdot (u_0 - u) - m \cdot g \\
 \Rightarrow & F_r = C \cdot u_0 - m \cdot g - C \cdot u \\
 \Rightarrow & F_r = -C \cdot u \quad \text{want } C \cdot u_0 - m \cdot g = 0 \\
 \Rightarrow & F_t = -C \cdot u
 \end{aligned}$$


Conclusie:

- De resulterende kracht is recht evenredig met de uitwijking uit de evenwichtstand.
 - De resulterende kracht is omhoog als de uitwijking omlaag is en vice versa.
- De trilling is dus harmonisch.

Opgave: Bol aan veer II

- a) De amplitude is de maximale uitwijking uit de evenwichtstand.
Vanuit de evenwichtstand zal de bol steeds maximaal 5,0 cm omhoog en of maximaal 5,0 cm omlaag gaan.
De amplitude is dus 5,0 cm.
- b) Hier wordt gevraagd naar de uitrekking, niet de uitwijking!
minimale uitrekking = evenwichtstand - 5,0 cm
maximale uitrekking = evenwichtstand + 5,0 cm
Dus bereken de uitrekking van de veer in de evenwichtstand.


Voor de evenwichtstand geldt:



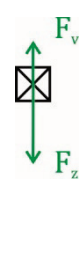
$$\begin{aligned}
 1) \quad & F_r = 0 \text{ N} \\
 2) \quad & F_r = F_v - F_z \\
 & * F_v = C \cdot u_0 = 20 \cdot u_0 \\
 & * F_z = m \cdot g = 0,150 \cdot 9,81 = 1,4715 \text{ N} \\
 & \Rightarrow F_r = 20 \cdot u_0 - 1,4715 \\
 & \Rightarrow 0 = 20 \cdot u_0 - 1,4715 \\
 & \Rightarrow u_0 = 7,3575 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 7,3575 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

De minimale uitrekking is 2,3575 cm en de maximale uitrekking is 12,3575 cm dus:
 $2,4 \text{ cm} \leq u \leq 12,4 \text{ cm}$

- c) Methode 1:



$$\begin{aligned}
 1) \quad & F_r = F_t \\
 2) \quad & F_r = F_v - F_z \\
 & * F_v = C \cdot u = 20 \cdot 0,123575 = 2,4715 \text{ N} \\
 & * F_z = 1,4715 \text{ N} \\
 & \Rightarrow F_r = 1,0 \text{ N} \\
 & \Rightarrow F_t = 1,0 \text{ N omhoog gericht}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 1) \quad & F_r = F_t \\
 2) \quad & F_r = F_z - F_v \\
 & * F_z = 1,4715 \text{ N} \\
 & * F_v = C \cdot u = 20 \cdot 0,023575 = 0,4715 \text{ N} \\
 & \Rightarrow F_r = 1,0 \text{ N} \\
 & \Rightarrow F_t = 1,0 \text{ N omlaag gericht}
 \end{aligned}$$

Methode 2:

Er geldt: $F_t = C \cdot u = 20 \cdot 0,050 = 1,0 \text{ N}$

In de uiterste stand beneden wijst F_t omhoog. In de uiterste stand boven wijst F_t omlaag.

De formule zoals ik deze hier gebruik zegt alleen iets over de grootte van de kracht. Formeel correct zou zijn:

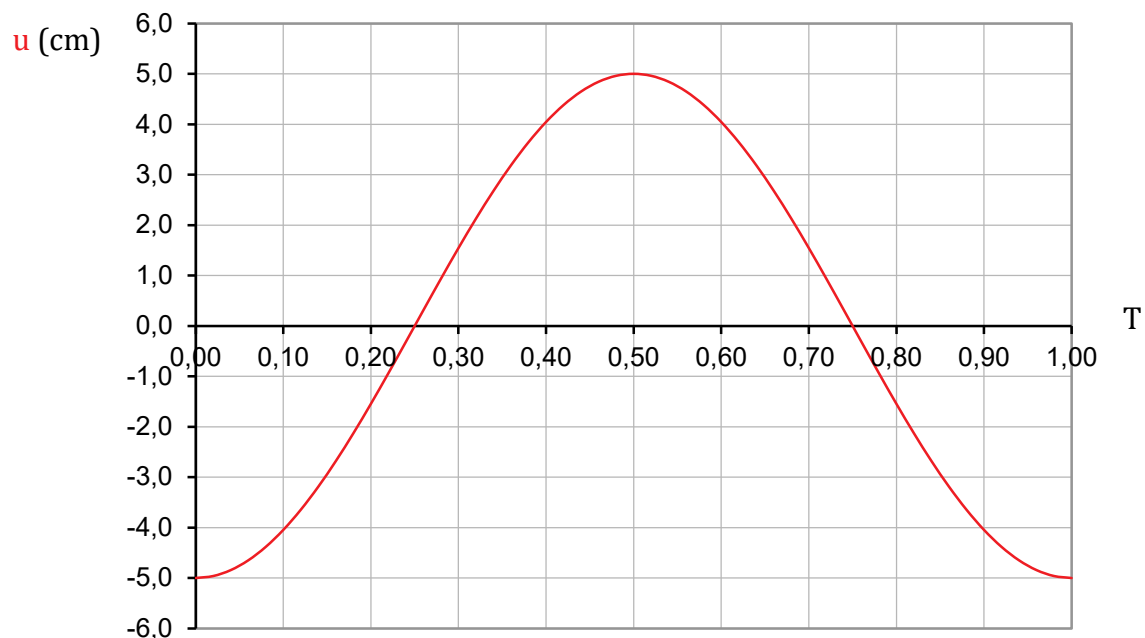
Uiterste stand beneden: $u = -5,0 \text{ cm}$, dus $F_t = -C \cdot u = -20 \cdot -0,050 = +1,0 \text{ N}$

Uiterste stand boven: $u = +5,0 \text{ cm}$, dus $F_t = -C \cdot u = -20 \cdot 0,050 = -1,0 \text{ N}$

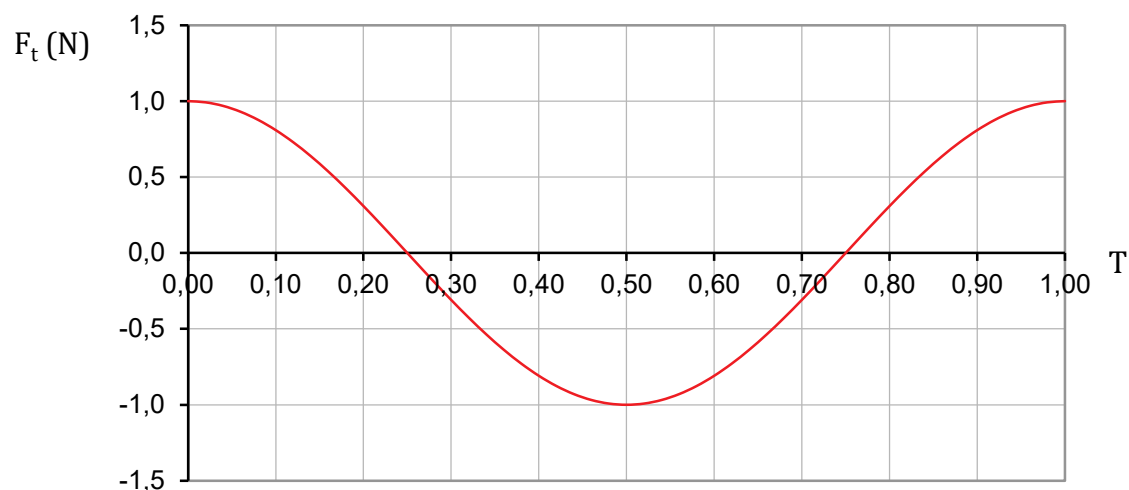
Ondanks dat methode 2 zo simpel lijkt, bedenk dat je moet snappen waar je mee bezig bent. De methode “pak formule, vul in en reken uit” gaat tijdens het proefwerk gegarandeerd mis!

Je merkt nu al dat de u in BiNaS verschillende betekenissen kan hebben. Zorg dat je weet wanneer welke van toepassing is.

d) Zie aantekening “Trillingen en diagrammen” voor toelichting.



$F_t = -C \cdot u$; voor getallen zie c).



Je ziet F_t en u zijn voortdurend tegengesteld van teken.

- e) $F_t = -C \cdot u$; voor getallen zie c).
Vergelijk met $y = ax + b$,
 F_t op de plaats van y ; u op de plaats van x ; het hellingsgetal is $-C$.
Dus de gevraagde grafiek is een dalende rechte door de oorsprong.
Let op: $-5,0 \text{ cm} \leq u \leq +5,0 \text{ cm}$!

