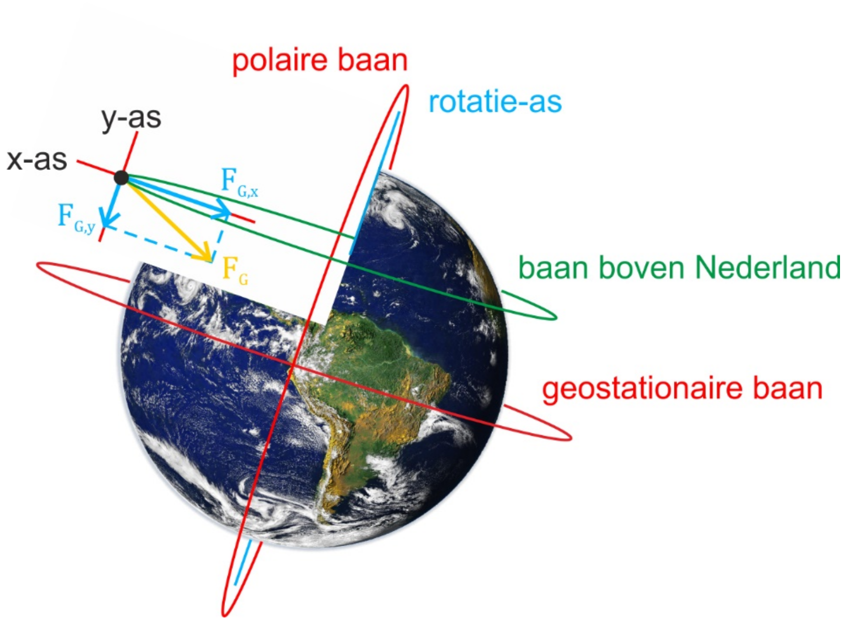
Gravitatie



Opgave: Satellietbanen

a) Op een satelliet werkt in een baan om de aarde alleen de gravitatiekracht. Deze is altijd naar het middelpunt van de aarde gericht. Om echter een cirkelbaan boven Nederland te beschrijven, zoals aangegeven, is een middelpuntzoekende kracht nodig die naar het middelpunt van die cirkelbaan is gericht. De gravitatiekracht kan echter worden ontbonden in een x-component die naar dit middelpunt is gericht en een y-component die daar loodrecht op staat. Zie bovenstaande afbeelding. Die y-component zou dan gecompenseerd moeten worden door een raketmotor die continu deze component van de gravitatiekracht tegenwerkt. Dit is niet mogelijk, daar dit een veel te grote hoeveelheid brandstof vereist.
De enige stabiele cirkelvormige banen zijn dus die waarvan het middelpunt van de cirkelbaan samenvalt met het middelpunt van de aarde.

b) De geostationaire baan is een baan rond de evenaar met een omlooptijd van $24\ \mathrm{uur}$.
Er geldt:

$$1)\ F_r = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$2)\ F_r = F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$$

$$\Rightarrow r = G \cdot \frac{M}{v^2}$$

$$* v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\Rightarrow r = G \cdot \frac{M}{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2}$$

$$\Rightarrow r^3 = G \cdot \frac{M \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{6{,}67384 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (0{,}9973 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 4{,}2164 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

$$\Rightarrow h = r - R = 4{,}216 \cdot 10^7 - 0{,}6371370 \cdot 10^7 = 3{,}579 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

c) Door de combinatie van de beweging van de satelliet om de aarde en het draaien van de aarde om haar as komt elk punt van het aardoppervlak in beeld van de spionagesatelliet.

d) In wezen is de afleiding al grotendeels gedaan bij b).
Er geldt:

$$1)\ F_r = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$2)\ F_r = F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$\Rightarrow\ v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$$

$$\Rightarrow\ r = G \cdot \frac{M}{v^2}$$

$$* \ v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\Rightarrow\ r = G \cdot \frac{M}{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ r^3 = G \cdot \frac{M \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M \cdot T^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{T^2}{r^3} = \text{constant}$$

Je ziet dat deze vorm van de derde wet van Keppler niets nieuws is. Het is in wezen een relatief eenvoudige combinatie van eenparige cirkelbeweging en de gravitatiewet.
De algemene vorm van de derde wet van Keppler heeft betrekking op ellipsbanen en luidt dan:

$$\Rightarrow\ \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (M + m)}$$

Hierin is a de halve lange as van de ellipsbaan.