Beweging

Voorbeeld: Roofjump II

Bij één van de voorgaande opgaven heb je moeten berekenen hoe snel iemand moet rennen om van een hoger gelegen dak naar een lager gelegen dak te springen. In het eenvoudige geval dat je daar hebt bestudeerd wist je de exacte vergelijkingen die de beweging beschreven. Wat als je deze niet weet?
Je kunt bewegingen ook numeriek oplossen.
Stel iemand rent van een horizontaal dak met een horizontaal gerichte beginsnelheid $4{,}0\ \mathrm{m/s}$. Het lager gelegen dak bevindt zich $4{,}0\ \mathrm{m}$ verderop en $2{,}0\ \mathrm{m}$ lager.
Teken de baan van de man.

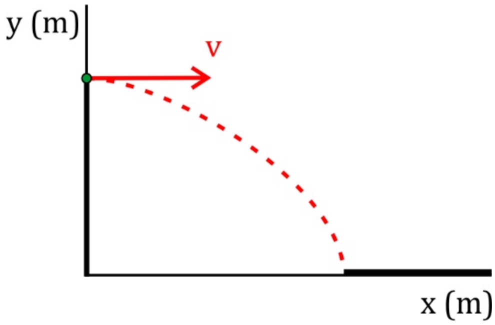
Deze opgave gaan we oplossen met behulp van Excel.
Ten eerste vereenvoudigen we het probleem door de luchtwrijving te verwaarlozen en de man als puntmassa te beschouwen.

De beginvoorwaarden voor het numerieke programma zijn als volgt:

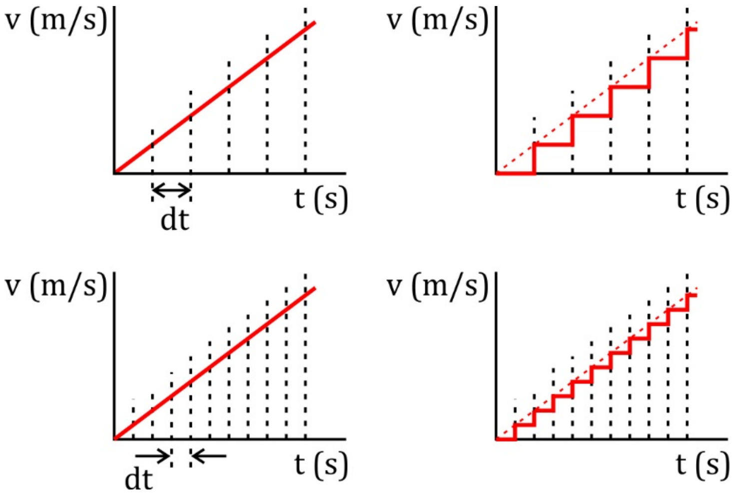
Plaats:
- $x(0) = 0\ \mathrm{m}$
- $y(0) = 2{,}0\ \mathrm{m}$

Snelheid:
- $vx(0) = 4{,}0\ \mathrm{m/s}$
- $vy(0) = 0\ \mathrm{m/s}$

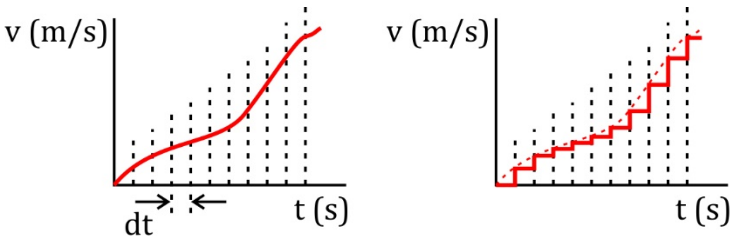
Versnelling:
- $ax = 0\ \mathrm{m/s^2}$
- $ay = -9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$



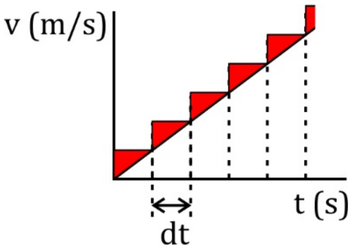
Op tijdstip $t = 0$ zijn plaats, snelheid en versnelling bekend, maar hoe bereken je de plaats en snelheid op een tijdstip dat later ligt.
Een computer doet dat heel eenvoudig. Een computer benadert het probleem door het probleem in kleine tijdstapjes te verdelen. Tijdens zo'n tijdstapje worden alle grootheden constant verondersteld.
De rechte in het eerste (v,t)-diagram wordt benaderd door de trapgrafiek in het diagram rechtsboven.



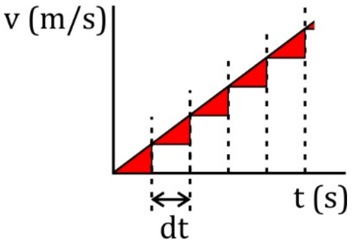
Door de tijdstap kleiner te kiezen zoals is gedaan in de volgende twee diagrammen, zie je dat de trapgrafiek in het vierde diagram al een veel betere benadering is voor de rechte. Door de tijdstap steeds kleiner te nemen kan de benadering steeds nauwkeuriger worden gemaakt.
Dit gaat echter ten koste van de rekentijd.
Deze benaderingsmethode werkt voor elke willekeurige kromme lijn.
Zie nevenstaand (v,t)-diagram.



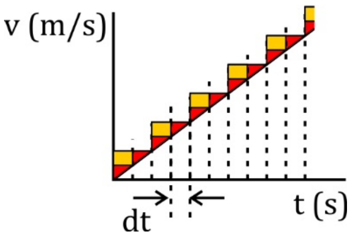
De afgelegde weg komt overeen met het oppervlak onder het (v,t)-diagram.
Elk willekeurig oppervlak kan op bovenstaande manier dus worden benaderd als een optelsom van rechthoeken met breedte dt en hoogte v.



Overschatting:
Bij deze benadering tel je bij elke rechthoek een stukje *te veel* (aangegeven als rode driehoekjes).
Elke dt seconden neemt de afgelegde weg s toe met de oppervlakte van één rechthoek.
De snelheid v *aan het einde* van het tijdsinterval dt is de hoogte van de rechthoek. De breedte van de rechthoek is gelijk aan dt.



Onderschatting:
Bij deze benadering tel je bij elke rechthoek een stukje *te weinig* (aangegeven als rode driehoekjes).
Elke dt seconden neemt de afgelegde weg s toe met de oppervlakte van één rechthoek.
De snelheid v *aan het begin* van het tijdsinterval dt is de hoogte van de rechthoek. De breedte van de rechthoek is gelijk aan dt.



Ook nu weer is duidelijk te zien dat als de stapgrootte dt kleiner wordt gekozen de benadering van het oppervlak onder het (v,t)-diagram nauwkeuriger wordt. Dit is in nevenstaande afbeelding weergegeven. Hierin is de stapgrootte gehalveerd. Het teveel getelde stuk oppervalk is weergegeven met rode driehoekjes. De gele rechthoekjes geven het verschil tussen de vorige benadering (de overschatting met een twee keer zo grote dt) en deze benadering weer.
Natuurlijk geldt eenzelfde redenering voor het geval van de onderschatting.

Terug naar ons voorbeeld.

$vx = 4{,}0\ m/s$ betekent dat dt seconden later x met $vx \cdot dt$ meter is toegenomen.
Weer dt seconden later is x weer met $vx \cdot dt$ meter toegenomen.
$x(0) = 0$
$x(dt) = x(0) + vx \cdot dt$
$x(2 \cdot dt) = x(0) + vx \cdot dt + vx \cdot dt = x(dt) + vx \cdot dt$
$x(3 \cdot dt) = x(0) + vx \cdot dt + vx \cdot dt + vx \cdot dt = x(2 \cdot dt) + vx \cdot dt$
$x(4 \cdot dt) = x(0) + vx \cdot dt + vx \cdot dt + vx \cdot dt + vx \cdot dt = x(3 \cdot dt) + vx \cdot dt$
enz.
In het algemeen: $x((n+1) \cdot dt) = x(n \cdot dt) + vx \cdot dt$
Oftewel in eenvoudige bewoording: de nieuwe x is de oude x plus het volgende rechthoekje $vx \cdot dt$.

$vy = 0{,}0\ m/s$ betekent dat dt seconden later y met $vy \cdot dt$ meter is toegenomen.
Weer dt seconden later is y weer met $vy \cdot dt$ meter toegenomen.
$y(0) = 0$
$y(dt) = y(0) + vy \cdot dt$
$y(2 \cdot dt) = y(0) + vy \cdot dt + vy \cdot dt = y(dt) + vy \cdot dt$
$y(3 \cdot dt) = y(0) + vy \cdot dt + vy \cdot dt + vy \cdot dt = y(2 \cdot dt) + vy \cdot dt$
$y(4 \cdot dt) = y(0) + vy \cdot dt + vy \cdot dt + vy \cdot dt + vx \cdot dt = y(3 \cdot dt) + vy \cdot dt$
enz.
In het algemeen: $y((n+1) \cdot dt) = y(n \cdot dt) + vy \cdot dt$

Net zoals de afgelegde weg is te bepalen met behulp van het oppervlak onder een (v,t)-diagram zo is de snelheidsverandering te bepalen met behulp van het oppervlak onder een (a,t)-diagram.

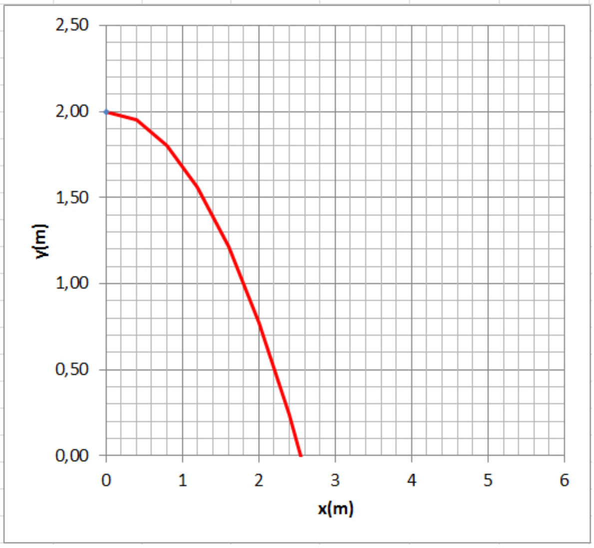
vx is constant, want $ax = 0\ m/s^2$.

vy is niet constant, want $ay = -9{,}81\ m/s^2$.
$ay = -9{,}81\ m/s^2$ betekent dat dt seconden later vy met $ay \cdot dt$ meter is toegenomen.
Weer dt seconden later is vy weer met $ay \cdot dt$ meter toegenomen.
$vy(0) = 0$
$vy(dt) = vy(0) + ay \cdot dt$
$vy(2 \cdot dt) = vy(0) + ay \cdot dt + ay \cdot dt = y(dt) + ay \cdot dt$
$vy(3 \cdot dt) = vy(0) + ay \cdot dt + ay \cdot dt + ay \cdot dt = y(2 \cdot dt) + ay \cdot dt$
$vy(4 \cdot dt) = vy(0) + ay \cdot dt + ay \cdot dt + ay \cdot dt + ax \cdot dt = y(3 \cdot dt) + ay \cdot dt$
enz.
In het algemeen: $vy((n+1) \cdot dt) = vy(n \cdot dt) + ay \cdot dt$

Deze rekenregels kun je gemakkelijk in Excel invoeren.
De rekenregels luiden dan:
$x_{n+1} = x_n + vx \cdot dt$
$y_{n+1} = y_n + vy \cdot dt$
$vy_{n+1} = vy_n + ay \cdot dt$

Open het bestand “Roofjump 1.xlsx”. Dit bestand is te vinden op de site.
http://www.rwi-natuurkunde.nl/download/doc/Roofjump 1.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	x(0)	0	m		vx(0)	4	m/s		ax	0	m/s2			
2	y(0)	2	m		vy(0)	0	m/s		ay	-9,81	m/s2			
3														
4														
5					dt	0,1	s							
6														
7														
8	**t(s)**	**x(m)**	**vy(m/s)**	**y(m)**		**x exact**	**y exact**							
9	0,000	0,000	0,000	2,000		0,000	2,000							
10	0,100					0,400	1,951							
11	0,200					0,800	1,804							
12	0,300					1,200	1,559							
13	0,400					1,600	1,215							
14	0,500					2,000	0,774							
15	0,600					2,400	0,234							
16	0,700					2,800	-0,403							
17	0,800					3,200	-1,139							
18	0,900					3,600	-1,973							
19	1,000					4,000	-2,905							
20	1,100					4,400	-3,935							
21	1,200					4,800	-5,063							
22	1,300					5,200	-6,289							
23	1,400					5,600	-7,614							
24	1,500					6,000	-9,036							
25	1,600					6,400	-10,557							
26	1,700					6,800	-12,175							
27	1,800					7,200	-13,892							



In het bestand is reeds een t-kolom met t-waarden.
Tevens is er al een diagram waarin y als functie van x is uitgezet.
De exacte oplossing is reeds weergegeven met een rode lijn. De numerieke oplossing zal verschijnen als blauwe punten. De rode achtergrondkleur in de kolom voor de y-waarden geeft aan dat de y-waarde kleiner of gelijk aan $0\ \mathrm{m}$ is.

a) Voer de rekenregels voor $x(\mathrm{m})$ en $v(\mathrm{m/s})$ en $y(\mathrm{m})$ in.
   Kopieer deze naar alle onderliggende cellen.

Je ziet dat de blauwe punten niet precies overeenkomen met de rode lijn. Dit komt omdat de numerieke methode gedurende de tijdstapjes dt veronderstelt dat vy constant is. Dit is natuurlijk niet waar. Maar deze benadering wordt beter als het tijdstapje dt korter duurt.

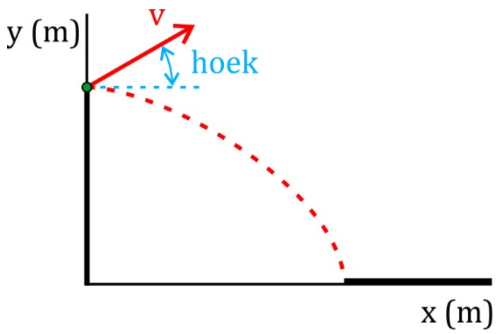
b) Verander de waarde voor dt van $0{,}1\ \mathrm{s}$ naar $0{,}01\ \mathrm{s}$ en kijk wat er gebeurt.
c) Bepaal met behulp van dit programma de minimale snelheid die de springer moet hebben om het lager gelegen dak te bereiken.

Opgave: Roofjump met hoek

Open het bestand “Roofjump 2.xlsx”. Ook dit bestand is te vinden op de site.
http://www.rwi-natuurkunde.nl/download/doc/Roofjump 2.xlsx
Dit bestand is soortgelijk opgebouwd als het Excelbestand in het vorige voorbeeld.
Nu zet de springer zich echter af van de rand van het dak, waardoor de beginsnelheid niet horizontaal is gericht.

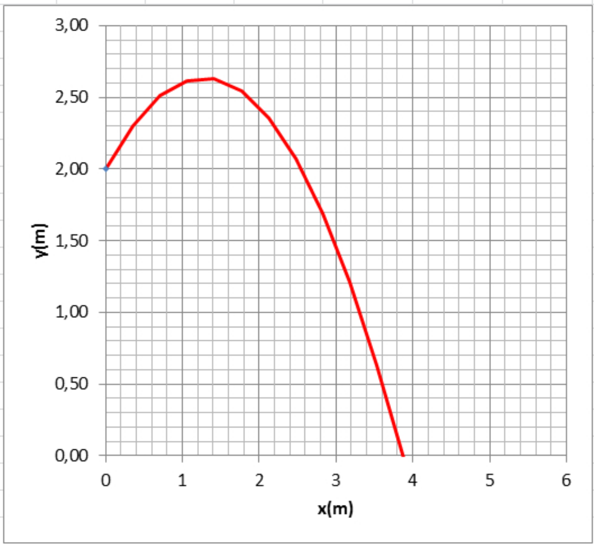
De beginvoorwaarden voor het numerieke programma zijn als volgt:

Plaats:
$x(0) = 0\ \mathrm{m}$
$y(0) = 2{,}0\ \mathrm{m}$
Snelheid:
$v(0) = 5{,}0\ \mathrm{m/s}$
Versnelling:
$ax = 0\ \mathrm{m/s^2}$
$ay = -9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$
Hoek:
$\mathrm{hoek} = 45°$



a) Voer de rekenregels voor $x(m)$ en $v(m/s)$ en $y(m)$ in.
Kopieer deze naar alle onderliggende cellen.
b) Bepaal het bereik van hoeken waarmee de springer zich kan afzetten om bij de gegeven snelheid het lager gelegen dak te bereiken.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	x(0)	0	m		vx(0)	3,536	m/s		ax	0	m/s2			
2	y(0)	2	m		vy(0)	3,536	m/s		ay	-9,81	m/s2			
3														
4	v	5	m/s											
5	hoek	45	graden		dt	0,10	s							
6														
7														
8	t(s)	x(m)	vy(m/s)	y(m)		x exact	y exact							
9	0,000	0,000	3,536	2,000		0,000	2,000							
10	0,100					0,354	2,305							
11	0,200					0,707	2,511							
12	0,300					1,061	2,619							
13	0,400					1,414	2,629							
14	0,500					1,768	2,542							
15	0,600					2,121	2,356							
16	0,700					2,475	2,071							
17	0,800					2,828	1,689							
18	0,900					3,182	1,209							
19	1,000					3,536	0,631							
20	1,100					3,889	-0,046							
21	1,200					4,243	-0,821							
22	1,300					4,596	-1,693							
23	1,400					4,950	-2,664							
24	1,500					5,303	-3,733							
25	1,600					5,657	-4,900							
26	1,700					6,010	-6,165							
27	1,800					6,364	-7,528							



Zodra je de module krachten hebt bestudeerd zullen we kijken naar bewegingen met wrijving en kunnen de modellen steeds realistischer worden.