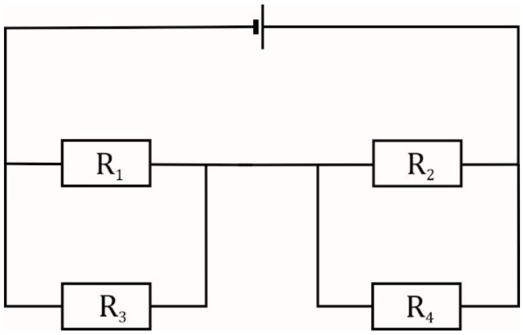
Wetten van Kirchhoff

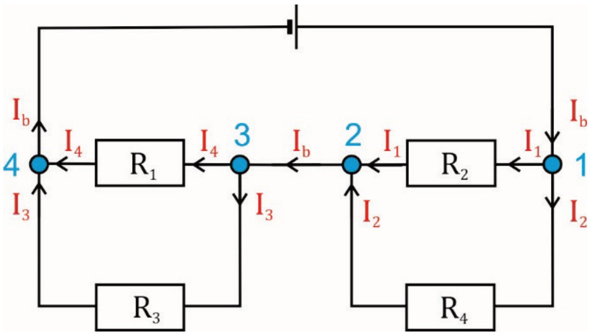
Opgave: Wetten van Kirchhoff 1

$R_1 = 2{,}0\ \Omega$
$R_2 = 3{,}0\ \Omega$
$R_3 = 4{,}0\ \Omega$
$R_4 = 5{,}0\ \Omega$
$U_b = 5{,}0\ V$



In dit probleem zijn er 5 onbekenden, namelijk I_1, I_2, I_3, I_4 en I_b. Dat betekent dat we vijf vergelijkingen
nodig hebben om dit probleem op te lossen.

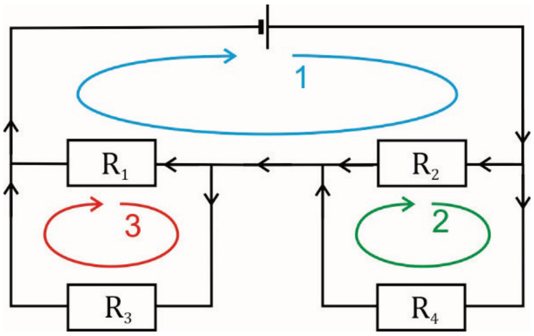
In nevenstaande afbeelding zijn alle knooppunten weergegeven waarop we de stroomwet van Kirchhoff kunnen toepassen.



1: $I_b = I_1 + I_2$
2: $I_1 + I_2 = I_b$
3: $I_b = I_3 + I_4$
4: $I_3 + I_4 = I_b$

Als je de vier vergelijkingen goed bekijkt zie dat het eigenlijk maar twee onafhankelijke vergelijkingen zijn, want 1 en 2 zijn hetzelfde, net als 3 en 4. Er zijn dus nog drie vergelijkingen nodig om het probleem te kunnen oplossen. Om deze te vinden passen we de spanningswet van Kirchhoff toe.

In nevenstaande afbeelding zijn drie gesloten lussen weergegeven waarop we de spanningswet van Kirchhoff gaan toepassen. Er zijn andere lussen mogelijk maar aan deze drie hebben we genoeg.



1: $U_b - U_{R_2} - U_{R_1} = 0$
2: $U_{R_2} - U_{R_4} = 0$
3: $U_{R_1} - U_{R_3} = 0$

Deze vergelijkingen zijn te schrijven als:

1: $I_1 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_1 = U_b$		1: $3 \cdot I_1 + 2 \cdot I_4 = 5$
2: $I_1 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_4 = 0$	$\Rightarrow$	2: $3 \cdot I_1 - 5 \cdot I_2 = 0$
3: $I_4 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 = 0$		3: $2 \cdot I_4 - 4 \cdot I_3 = 0$

Nu hebben we vijf onafhankelijke vergelijkingen en is het probleem gereduceerd tot een wiskundeprobleem.

De twee stroomwetresultaten even omschrijven:

$I_b = I_1 + I_2$ $\quad$ $I_b - I_1 - I_2 = 0$
$I_b = I_3 + I_4$ $\quad$ $I_b - I_3 - I_4 = 0$

We hebben nu onderstaande vijf vergelijkingen:

$1 \cdot I_b - 1 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 = 0$ stroomwet
$1 \cdot I_b - 1 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 = 0$ stroomwet
$3 \cdot I_1 + 2 \cdot I_4 = 5$ spanningswet
$3 \cdot I_1 - 5 \cdot I_2 = 0$ spanningswet
$2 \cdot I_4 - 4 \cdot I_3 = 0$ spanningswet

In een matrix zijn deze vijf vergelijkingen te schrijven als:

$a \cdot I_b + b \cdot I_1 + c \cdot I_2 + d \cdot I_3 + e \cdot I_4 = f$

$1 \cdot I_b - 1 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 = 0$
$1 \cdot I_b + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - 1 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 = 0$
$0 \cdot I_b + 3 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 = 5$
$0 \cdot I_b + 3 \cdot I_1 - 5 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 = 0$
$0 \cdot I_b + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 = 0$

De coëfficiëntenmatrix voor dit stelsel van vergelijkingen ziet er dan als volgt uit:

a	b	c	d	e	f
1	-1	-1	0	0	0
1	0	0	-1	-1	0
0	3	0	0	2	5
0	3	-5	0	0	0
0	0	0	-4	2	0

De solver van het grafisch rekenapparaat geeft dan als oplossing:

$I_b = 1{,}558$ A = 1,6 A
$I_1 = 0{,}974$ A = 0,97 A
$I_2 = 0{,}584$ A = 0,58 A
$I_3 = 0{,}519$ A = 0,52 A
$I_4 = 1{,}038$ A = 1,0 A

Dit ziet er logisch uit want $I_b = I_1 + I_2$ en $I_b = I_3 + I_4$.

Met ingang van het nieuwe examenprogramma mogen jullie echter geen gebruik meer maken van het grafisch rekenapparaat. Je kunt bovenstaand stelsel echter ook oplossen zonder grafisch rekenapparaat. Als je van sudoku's houdt dan vind je dit ook leuk.

Noteer het stelsel zoals weergegeven in onderstaande matrix. De verticale streep staat daar waar het “=”-teken in de vergelijkingen staat.
De regel is dan als volgt:
Zorg er door optellen en aftrekken van de rijen voor dat in elke rij voor de streep slechts één 1 en voor de rest nullen staan. De enen mogen niet in dezelfde kolom staan.

1	-1	-1	0	0	0	Originele stelsel
1	0	0	-1	-1	0	
0	3	0	0	2	5	
0	3	-5	0	0	0	
0	0	0	-4	2	0	

0	-1	-1	1	1	0	rij 1 – rij 2
1	0	0	-1	-1	0	
0	1	0	0	2/3	5/3	rij 3 delen door 3
0	0	-5	0	-2	-5	rij 4 – rij 3
0	0	0	1	-1/2	0	rij 5 delen door -4

0	0	-1	1	1 2/3	5/3	rij 1 + rij 3
1	0	0	0	-1 1/2	0	rij 2 + rij 5
0	1	0	0	2/3	5/3	
0	0	1	0	2/5	1	rij 4 delen door -5
0	0	0	1	-1/2	0	

0	0	-1	0	2 1/6	5/3	rij 1 – rij 5
1	0	0	0	-1 1/2	0	
0	1	0	0	2/3	5/3	
0	0	1	0	2/5	1	
0	0	0	1	-1/2	0	

0	0	0	0	2 17/30	2 2/3	rij 1 + rij 4
1	0	0	0	-1 1/2	0	
0	1	0	0	2/3	5/3	
0	0	1	0	2/5	1	
0	0	0	1	-1/2	0	

0	0	0	0	1	80/77	rij 1 delen door 2 17/30
1	0	0	0	-1 1/2	0	
0	1	0	0	2/3	5/3	
0	0	1	0	2/5	1	
0	0	0	1	-1/2	0	

0	0	0	0	1	80/77	
1	0	0	0	0	80/77∗3/2	rij 2 + 3/2 ∗rij 1
0	1	0	0	0	5/3-2/3∗80/77	rij 3 – 2/3∗rij 1
0	0	1	0	0	1-2/5∗80/77	rij 4 – 2/5∗rij 1
0	0	0	1	0	1/2∗80/77	rij 5 + 1/2∗rij 1

Dit betekent (zie oorspronkelijke stelsel):

I_b	I_1	I_2	I_3	I_4	
0	0	0	0	1	80/77
1	0	0	0	0	80/77∗3/2
0	1	0	0	0	5/3 – 2/3∗80/77
0	0	1	0	0	1 – 2/5∗80/77
0	0	0	1	0	1/2∗80/77

Dus wederom vinden we:

$I_b = 80/77 * 3/2 = 1{,}558\ \text{A} = 1{,}6\ \text{A}$

$I_1 = 5/3 - 2/3 * 80/77 = 0{,}974\ \text{A} = 0{,}97\ \text{A}$

$I_2 = 1 - 2/5 * 80/77 = 0{,}584\ \text{A} = 0{,}58\ \text{A}$

$I_3 = 1/2 * 80/77 = 0{,}519\ \text{A} = 0{,}52\ \text{A}$

$I_4 = 80/77 = 1{,}038\ \text{A} = 1{,}0\ \text{A}$

Een paar opmerkingen:

- Je hebt waarschijnlijk gemerkt dat bovenstaande rekenmethode nogal wat tijd kan kosten. Op een proefwerk zal dan vaak ook alleen worden gevraagd om het stelsel van vergelijkingen op te stellen, maar niet om dit op te lossen.
- Daarnaast geldt natuurlijk dat mijn volgorde van rijen bij elkaar tellen niet de enige route is die naar de juiste uitkomst leidt.
- Je hoeft niet per se met breuken te werken als je met gewone getallen werkt is dat ook goed.
- Bovenstaande rekenmethode wordt het vegen van de matrix genoemd en is een toepassing van Gauss-eliminatie.
  Voor meer informatie kijk eens op de pagina onder onderstaande link:
  link naar pagina [1)].

Bovenstaand resultaat had je ook kunnen berekenen via de oude vertrouwde weg. Met behulp van de vervangingsweerstand de bronstroomsterkte uitrekenen en deze vervolgens in omgekeerde verhouding van de weerstanden over de verschillende takken verdelen.
In het tweede voorbeeld zul je zien dat die route niet altijd werkt.

1)